Лабораторные занятия

Модуль 1. Одноканальная СМО

Лабораторная работа 1

Одноканальная СМО с отказами в обслуживании

Цель работы. Проведение анализа простой одноканальной СМО с отказами в обслуживании, на которую поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ, а обслуживание происходит под действием пуассоновского потока с интенсивностью μ.

Задание на лабораторную работу

Разработать математическую модель одноканального СМО с отказами в обслуживании. Теоретически и практически рассчитать вероятности состояния **P1**, вероятность отказа **Ротк**, абсолютную **A** и относительную **q** пропускную способность системы, среднее время ожидания в очереди **tож**, среднее время пребывания в системе **tсист**

Примерами одноканальных СМО с отказами в обслуживании являются: стол заказов в магазине, диспетчерская автотранспортного предприятия, контора склада, офис управления коммерческой фирмы, с которыми устанавливается связь по телефону.

Тема 1. Общие понятие теории массового обслуживания. Моделирование систем массового обслуживания.

Природа массового обслуживания, в различных сферах, весьма тонка и сложна. Коммерческая деятельность связана с выполнением множества операций на этапах движения, например товарной массы из сферы производства в сферу потребления. Такими операциями являются погрузка товаров, перевозка, разгрузка, хранение, обработка, фасовка, реализация. Кроме таких основных операций процесс движения товаров сопровождается большим количеством предварительных, подготовительных, сопутствующих, параллельных и последующих операций с платежными документами, тарой, деньгами, автомашинами, клиентами и т.п.

Для перечисленных фрагментов коммерческой деятельности характерны массовость поступления товаров, денег, посетителей в случайные моменты времени, затем их последовательное обслуживание (удовлетворение требований, запросов, заявок) путем выполнения соответствующих операций, время выполнения которых носит также случайный характер. Все это создает неравномерность в работе, порождает недогрузки, простой и перегрузки в коммерческих операциях. Много неприятностей доставляют очереди, например, посетителей в кафе, столовых, ресторанах, или водителей автомобилей на товарных базах, ожидающих разгрузки, погрузки или оформления документов. В связи с этим возникают задачи анализа существующих вариантов выполнения всей совокупности операций, например, торгового зала супермаркета, ресторана или в цехах производства собственной продукции для целей оценки их работы, выявления слабых звеньев и резервов для разработки в конечном итоге рекомендаций, направленных на увеличение эффективности коммерческой деятельности.

Переходы СМО из одного состояния в другое происходят под воздействием вполне определенных событий - поступления заявок и их обслуживания. Последовательность появления событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени, формирует так называемый поток событий. Примерами таких потоков в коммерческой деятельности являются потоки различной природы — товаров, денег, документов, транспорта, клиентов, покупателей, телефонных звонков, переговоров. Поведение системы обычно определяется не одним, а сразу несколькими потоками событий. Например, обслуживание покупателей в магазине определяется потоком покупателей и потоком обслуживания; в этих потоках случайными являются моменты появления покупателей, время ожидания в очереди и время, затрачиваемое на обслуживание каждого покупателя.

При этом основной характерной чертой потоков является вероятностное распределение времени между соседними событиями. Существуют различные потоки, которые отличаются своими характеристиками.

Поток событий называется регулярным, если в нем события следуют одно за другим через заранее заданные и строго определенные промежутки времени. Такой поток является идеальным и очень редко встречается на практике. Чаще встречаются нерегулярные потоки, не обладающие свойством регулярности.

Тема 2. Уравнения Колмогорова. Процессы «рождения – гибели». Одноканальная СМО.

Рассмотрим математическое описание марковского случайного процесса с дискретными состояниями системы S_o, S_l, S_2(см. рис. 6.2.1) и непрерывным временем. Полагаем, что все переходы системы массового обслуживания из состояния S_i в состояние Sj происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями λ_{ij}, а обратный переход под воздействием другого потока λ_{ij},. Введем обозначение p_i как вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии $S_{i.}$ Для любого момента времени t справедливо записать нормировочное условие—сумма вероятностей всех состояний равна 1:

$$\sum_{i=0}^{2} p_i(t)=p_0(t)+ p_1(t)+ p_2(t)=1$$

Проведем анализ системы в момент времени t, задав малое приращение времени Δt, и найдем вероятность p_1 (t+ Δt) того, что система в момент времени (t+ Δt) будет находиться в состоянии S_1 которое достигается разными вариантами:

а) система в момент t с вероятностью $p_1(t)$ находилась в состоянии S_1 и за малое приращение времени Δt так и не перешла в другое соседнее состояние — ни в S_0, ни в S_2. Вывести систему из состояния S_1 можно суммарным простейшим потоком с интенсивностью $(\lambda_{10} + \lambda_{12})$, поскольку суперпозиция простейших потоков также является простейшим потоком. На этом основании вероятность выхода из состояния S_1 за малый промежуток времени Δt приближенно равна $(\lambda_{10} + \lambda_{12}) * \Delta t$. Тогда вероятность невыхода из этого состояния равна $[1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12}) * \Delta t]$.В соответствии с этим вероятность того, что система останется в состоянии Si на основании теоремы умножения вероятностей, равна:

$p_1(t)\, [1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12}) * \Delta t]$;

б) система находилась в соседнем состоянии S_o и за малое время Δt перешла в состояние S_o Переход системы происходит под воздействием потока λ_{01} с вероятностью, приближенно равной $\lambda_{01} \Delta t$

Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_1, в этом варианте равна $p_o(t)\, \lambda_{01}\, \Delta t$;

в) система находилась в состоянии S_2 и за время Δt перешла в состояние S_1 под воздействием потока интенсивностью λ_{21} с вероятностью, приближенно равной $\lambda_{21} \Delta t$. Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_1, равна $p_2(t)\, \lambda_{21} \Delta t$.

Применяя теорему сложения вероятностей для этих вариантов, получим выражение:

$p_2(t+\Delta t) = p_1(t)\, [1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12}) * \Delta t] + p_o(t)\, \lambda_{01}\, \Delta t + p_2(t)\, \lambda_{21} \Delta t$,

которое можно записать иначе:

$p_2(t+\Delta t) - p_1(t) / \Delta t = p_o(t)\, \lambda_{01} + p_2(t)\, \lambda_{21} - p_1(t)\, (\lambda_{10} + \lambda_{12})$.

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, приближенные равенства перейдут в точные, и тогда получим производную первого порядка

$dp_2/dt = p_0\, \lambda_{01} + p_2\, \lambda_{21} - p_1\, (\lambda_{10} + \lambda_{12})$,

что является дифференциальным уравнением.

Проводя рассуждения аналогичным образом для всех других состояний системы, получим систему дифференциальных уравнений, которые называются уравнениями А.Н. Колмогорова:

$dp_0 / dt = p_1\, \lambda_{10}$,

$dp_1 / dt = p_0\, \lambda_{01} + p_2\, \lambda_{21} - p_1\, (\lambda_{10} + \lambda_{12})$,

$dp_2 / dt = p_1\, \lambda_{12} + p_2\, \lambda_{21}$.

Для Марковского процесса «рождения - гибели», описанного стохастическим графом, приведенным на рис. 2.1, найдем финальное распределение. Пользуясь правилами составления уравнений для конечного числа n предельных вероятностей состояния системы S_1, S_2, S_3,… S_k,…, S_n, составим соответствующие уравнения для каждого состояния:

для состояния $S_0 - \lambda_0 p_0 = \mu_0 p_1$;

для состояния $S_1 - (\lambda_1 + \mu_0) p_1 = \lambda_0 p_0 + \mu_1 p_2$, которое с учетом предыдущего уравнения для состояния S_0 можно преобразовать к виду $\lambda_1 p_1 = \mu_1 p_2$.

Аналогично можно составить уравнения для остальных состояний системы S_2, S_3,…, S_k,…, S_n. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 = \mu_0 p_1 \\ \lambda_1 p_1 = \mu_1 p_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{\kappa-1} p_{\kappa-1} = \mu_{\kappa},_{\kappa+1}\, p_{\kappa} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{n-1} p_{n-1} = \mu_n p_n \\ p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots + p_n = 1 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, можно получить выражения, определяющие финальные состояния системы массового обслуживания:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_0} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_0\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_0\mu_1\mu_2} + \ldots + \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_n}{\mu_0\mu_1\ldots\mu_n}\right)^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_0} p_0, \quad p_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_0\mu_1} p_0, \quad p_3 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_0\mu_1\mu_2} p_0, \quad p_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_{2\ldots}\lambda_n}{\mu_0\mu_1\mu_2\ldots\mu_n};$$

Следует заметить, что в формулы определения финальных вероятностей состояний p_1, p_2, p_3,…, p_n, входят слагаемые, являющиеся составной частью суммы выражения, определяющей p_0. В числителях этих слагаемых находятся произведения всех интенсивностей, стоящих у стрелок графа состояний, ведущих слева на право до рассматриваемого состояния S_k, а знаменатели представляют собой произведения всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа на лево до рассматриваемого состояния S_k, т.е. μ_0, μ_1, μ_2, μ_3,… μ_k. В связи с этим запишем эти модели в более компактном виде:

$$p_0 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \lambda_j}{\prod_{m=1}^{k} \mu_m}\right)^{-1}, \quad p_{\kappa} = \frac{\prod_{i=0}^{\kappa-1} \lambda_j}{\prod_{m=1}^{k} \mu_m},$$

$\kappa=1,n$