МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Э. И. Абдурагимов, Г.Э. Абдурагимов

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Махачкала
2018

Печатается по решению Научно – методического совета ДГУ.

Пособие предназначено для студентов факультета математики и компьютерных наук направления (специальности) 01.03.02─Прикладная математика и информатика.

По дисциплине «Численные методы решения некорректных задач» предусмотрено выполнение студентами лабораторных работ. В настоящем пособии приведены варианты заданий по соответствующей работе.

Составители: *Абдурагимов Э.И.* ─доцент кафедры
прикладной математики ДГУ,
Абдурагимов Г.Э..─доцент кафедры
прикладной математики ДГУ,

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

«МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА»

Задание к лабораторной работе

Дано интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds = f(t),\ \ a \le t \le b, \tag{1}$$

где $K(t,s)$ – ядро интегрального уравнения, $f(t)$ – заданная функция.

Целью настоящей работы является нахождение приближенного решения уравнения (1) с последующим построением соответствующего графика.

Приведем алгоритм решения поставленной задачи:

1. Для заданных значений $a = 0$, $b = 1$ и $N = 5$ найти шаг $h = \frac{b-a}{N}$ и задать равномерную сетку $x_k = x_{k-1} + h$, $k = 0..N$, $x_0 = 0$.
2. Составить последовательность регуляризующих параметров $\alpha_k = \frac{1}{10^k}$, $k = 0,1,\dots$
3. Составив матрицу из ядер $K\left(t_k, s_p\right)$ и вычислив значения функции $f(t_k)$, составить систему уравнений $\int_a^b \frac{K(t,s)}{\alpha}\varphi(s)ds = \frac{f(t)}{\alpha}$ и посчитать приближенные значения φ. Построить на графике полученные приближенные значения $\varphi_0, \dots, \varphi_N$.

Примечание. *Для приближенного вычисления интеграла п.3 можно воспользоваться квадратурными формулами, например формулой трапеций.*

Варианты

1. $K(t,s) = s^{t+\sin t}$;
2. $K(t,s) = s^t$;
3. $K(t,s) = t^s$;
4. $K(t,s) = \sqrt[3]{t+s}$;

5. $K(t,s) = \sec{(st)}$;

6. $K(t,s) = tg^3(s+t)$;

7. $K(t,s) = \sqrt{s+t}$;

8. $K(t,s) = tg(s+t)$;

9. $K(t,s) = 4\sec{(s+t)}$;

10. $K(t,s) = s^{t+\sin\, t}$;

11. $K(t,s) = \sqrt[7]{t+s}$;

12. $K(t,s) = sinh^t(s)$;

13. $K(t,s) = tgh(t+s)$;

14. $K(t,s) = \sqrt[5]{s+t} + \sin{(t)}$;

15. $K(t,s) = tg^s(t)$;

16. $K(t,s) = cos^t(s)$;

17. $K(t,s) = s^{\sqrt{t}}$;

18. $K(t,s) = s^{t+\sin\, s}$;

19. $K(t,s) = s^{t+tg\ \mathrm{t}}$;

20. $K(t,s) = s^{t-\sin\, s}$;

Содержание отчета

Отчет должен содержать титульный лист, номер варианта, краткое описание применяемого метода регуляризации и результаты решения задачи. Обязательно наличие выводов по проделанной работе. В случае несвоевременного выполнения задания к отчету прилагается USB носитель с выполненным заданием.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

«МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Задание к лабораторной работе

Дана система $Az = u$, в которой вместо матрицы A и вектора u известны приближенная матрица $\tilde{A}$ и приближенный вектор $\tilde{u}$. Указать h и δ в оценках $\left\|A - \tilde{A}\right\|_1 \leq h$ и $\|u - \tilde{u}\|_1 \leq \delta$.

Пусть z^α – вектор, минимизирующий функционал Тихонова $M^\alpha\left[z, \tilde{u}, \tilde{A}\right]$. Выбрать $\alpha = \alpha(\Delta)$, где $\Delta = hq + \delta$, $q > \|z^0\|$ (z^0 - нормальное решение) так, чтобы существовал $\lim_{\Delta \to 0} z^{\alpha(\Delta)}$ (т.е., чтобы $z^{\alpha(\Delta)}$ было регуляризованным решением). Найти $z^{\alpha(\Delta)}$ для 8-10 убывающих значений Δ. Выбор $\alpha(\Delta)$ обосновать.

Вариант 1

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Принять</u>: $\frac{1}{3} \approx 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}$, $n = \overline{7,15}$, при этом $\left|\frac{1}{3} - 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}\right| < 4 \cdot 10^{-(n+1)}$.

Вариант 2

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Принять</u>: $\frac{1}{3} \approx 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}$, $\frac{2}{3} \approx 0,\underbrace{66\ldots6}_{n}$, $n = \overline{8,15}$, при этом

$$\left|\frac{1}{3} - 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}\right| < 4 \cdot 10^{-(n+1)}, \left|\frac{2}{3} - 0,\underbrace{66\ldots6}_{n}\right| < 7 \cdot 10^{-(n+1)}.$$

Вариант 3

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5\\ 2 & 1 & 2/3 & 1/2 & 2/5\\ 3 & 3/2 & 1 & 3/4 & 3/5\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad u=\begin{pmatrix}1/3\\ 1/4\\ 1/5\\ 1/6\\ 3\end{pmatrix}.$$

<u>Принять</u>: $\frac{1}{3}\approx 0,\underbrace{33\dots3}_{n}$, $\frac{2}{3}\approx 0,\underbrace{66\dots6}_{n}$, , $\frac{1}{6}\approx 0,1\,\underbrace{66\dots6}_{n}$ $n=\overline{7,15}$, при этом

$\left|\frac{1}{3}-0,\underbrace{33\dots3}_{n}\right|<4\cdot10^{-(n+1)}$, $\left|\frac{2}{3}-0,\underbrace{66\dots6}_{n}\right|<7\cdot10^{-(n+1)}$,

$\left|\frac{1}{6}-0,1\,\underbrace{66\dots6}_{n}\right|<7\cdot10^{-(n+1)}$.

Вариант 4

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -2 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}, \qquad u=\begin{pmatrix}0{,}2\\ 0{,}4\\ 2{,}5\\ -4{,}2\\ -2{,}8\end{pmatrix}.$$

<u>Приближенно известны</u>: $a_{13}=-2+\delta$, $a_{43}=1-\delta$, $a_{55}=1+\delta$, $u_2=0{,}4+\delta$, $0<\delta\le10^{-5}$.

Вариант 5

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix}, \qquad u=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\\ 4\end{pmatrix}.$$

<u>Приближенно известны</u>: $a_{12}=2+\delta$, $a_{33}=2-\delta$, $a_{44}=2+\delta$, $u_2=1+\delta$, $0<\delta\le3\cdot10^{-6}$.

Вариант 6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

Принять: $\frac{1}{3} \approx 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}$, $n = \overline{7,15}$, при этом $\left|\frac{1}{3} - 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}\right| < 4 \cdot 10^{-(n+1)}$.

Вариант 7

$A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \frac{i+j}{2n}$, $\qquad i,j = \overline{1,n}$,

$u = (u_j)$, $\quad u_j = \frac{7-2(-1)^j}{j+1}$, $\quad j = \overline{1,n}$; $n = 7$.

Дроби округлять, оставляя шесть десятичных знаков ($\delta = 10^{-6}$).

Вариант 8

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Приближенно известны: $a_{14} = 3 + \delta$, $a_{35} = \delta$, $a_{56} = -3 + \delta$, $u_3 = 1 + \delta$, $0 < \delta \le 10^{-5}$.

Вариант 9

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Принять: $\frac{1}{3} \approx 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}$, $n = \overline{8,15}$, при этом $\left|\frac{1}{3} - 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}\right| < 4 \cdot 10^{-(n+1)}$.

Вариант 10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Приближенно известны: $a_{12} = 1 + \delta$, $a_{53} = 1 - \delta$, $u_5 = 2 + \delta$, $0 < \delta \leq 2 \cdot 10^{-5}$.

Вариант 11

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Принять: $\frac{1}{3} \approx 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}$, $n = \overline{7,15}$, при этом $\left|\frac{1}{3} - 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}\right| < 4 \cdot 10^{-(n+1)}$.

Вариант 12

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Приближенно известны: $a_{11} = 2 - \delta$, $a_{22} = 2 + \delta$, $a_{32} = 2 + \delta$, $a_{42} = 2 + \delta$, $u_1 = 2 + \delta$, $0 < \delta \leq 3 \cdot 10^{-4}$.

Вариант 13

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Приближенно известны: $a_{11} = 3 - \delta$, $a_{15} = 3 + \delta$, $a_{31} = 1 + \delta$, $a_{35} = 1 - \delta$, $u_2 = 1 + \delta$, $0 < \delta \leq 10^{-4}$.

Вариант 14

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Приближенно известны</u>: $a_{12} = 1 + \delta,\ a_{33} = -1 + \delta,\ a_{53} = \delta,\ u_1 = u_2 = 2 + \delta,$ $0 < \delta \le 2 \cdot 10^{-4}$.

Вариант 15

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

<u>Принять</u>: $\frac{1}{3} \approx 0,\underbrace{33\ldots3}_{n},\ \frac{2}{3} \approx 0,\underbrace{66\ldots6}_{n},\ n = \overline{8{,}15}$, при этом

$$\left|\frac{1}{3} - 0,\underbrace{33\ldots3}_{n}\right| < 4 \cdot 10^{-(n+1)},\ \left|\frac{2}{3} - 0,\underbrace{66\ldots6}_{n}\right| < 7 \cdot 10^{-(n+1)}.$$

Вариант 16

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

<u>Приближенно известны</u>: $a_{11} = 1 + \delta, u_1 = 3 - \delta,\ u_4 = 6 + \delta,\ 0 < \delta \le 10^{-5}$.

Вариант 17

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Приближенно известны</u>: $a_{22} = \delta,\ \ a_{25} = 3 + \delta,\ \ a_{41} = 1 - \delta,\ u_2 = u_3 = 2 + \delta,$ $0 < \delta \le 3 \cdot 10^{-4}$.

Содержание отчета

Отчет должен содержать титульный лист, номер варианта, краткое описание применяемого метода регуляризации и пошаговый алгоритм выполнения задания. Результаты решения задачи следует оформить в виде следующей таблицы:

$\Delta_1 = \cdots$	$\Delta_2 = \cdots$	$\Delta_3 = \cdots$	…	$\Delta_7 = \cdots$	$\Delta_8 = \cdots$
$z_1 = \cdots$	$z_1 = \cdots$	$z_1 = \cdots$	…	$z_1 = \cdots$	$z_1 = \cdots$
$z_2 = \cdots$	$z_2 = \cdots$	$z_2 = \cdots$	…	$z_2 = \cdots$	$z_2 = \cdots$
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	..	…
…	…	…	…	…	…
$z_n = \cdots$	$z_n = \cdots$	$z_n = \cdots$	…	$z_n = \cdots$	$z_n = \cdots$

Приближенное нормальное решение $z^0 = \begin{pmatrix} z_1 = \cdots \\ z_2 = \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ z_n = \cdots \end{pmatrix}$ (последний столбец таблицы).

Обязательно наличие выводов по проделанной работе. В случае несвоевременного выполнения задания к отчету прилагается USB носитель с выполненным заданием.

Библиографический список

1. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач /А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
2. Бахвалов, Н. С. Численные методы /Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г. М. Кобельков.-М.: Наука, 1987.
3. Тихонов, А. Н. Численные методы решения некорректно поставленных задач /А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А. Г. Ягола. – М.: Наука, 1990. – 231 с.