МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Э. И. Абдурагимов, Г.Э. Абдурагимов

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Махачкала
2020

Печатается по решению Научно – методического совета ДГУ.

Пособие предназначено для студентов факультета математики и компьютерных наук направления (специальности) 01.03.02‒Прикладная математика и информатика.

По дисциплине «Численные методы» предусмотрено выполнение студентами лабораторных работ. В настоящем пособии приведены краткие теоретические сведения и варианты лабораторных заданий по соответствующей работе.

Составители: *Абдурагимов Э.И.* ‒доцент кафедры прикладной математики ДГУ,
Абдурагимов Г.Э.‒доцент кафедры прикладной математики ДГУ,

Пусть на отрезке $[a, b]$ дан конечный набор различных точек x_0, x_1, … , x_n, называемые *узлами интерполяции*, и известны значения некоторой функции f в указанных точках:

$$f_i = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

В частности, эти значения могут быть получены экспериментально или в ходе достаточно сложных расчетов.

В приложениях и в практических задачах часто возникает необходимость приближенного восстановления функции f в произвольной точке x отрезка $[a, b]$. Для решения данной задачи обычно привлекают алгебраический многочлен $L_n(x)$ степени n, такой что

$$L_n(x_i) = f_i, i = \overline{0, n}. \tag{1}$$

Многочлен $L_n(x)$, обладающий свойством (1), называют *интерполяционным*.

Приближенное восстановление функции f в произвольных точках, отличных от узлов, с помощью соответствующего интерполяционного многочлена называют *интерполяцией* функции f.

Теорема 1. *Существует единственный интерполяционный многочлен n - й степени.*

Рассмотрим различные формы записи интерполяционного многочлена. В частности, *интерполяционный многочлен Лагранжа*

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{2}$$

Например, при $n = 3$

$$L_3(x) = f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$
$$+ f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Широкое распространение получила еще одна форма представления интерполяционного многочлена, это *интерполяционный многочлен Ньютона*. Предварительно введем понятие *разделенной разности*.

Значения $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$ функции f в узлах называются *разделенными разностями нулевого порядка*.

Число $f\left(x_i; x_j\right) = \frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$, $i \neq j$ называется *разделенной разностью первого порядка*.

Разделенная разность -го порядка определяется через разделенные разности $n-1$-го порядка по реккурентной формуле

$$f(x_0;, x_1; \dots; x_n) = \frac{f(x_1;,x_2;\dots;x_n)-f(x_0;,x_1;\dots;x_{n-1})}{x_n-x_0}.$$

Разделенную разность -го порядка можно выразить через узловые значения функции по формуле ([1]):

$$f(x_0;, x_1; \dots; x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \qquad (3)$$

Например, при $n = 2$

$$f(x_0;, x_1; x_2) = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Из формулы(4), очевидным образом, следует, что разделенная разность – симметричная функция своих аргументов.

С помощью разделенных разностей, интерполяционный многочлен в форме Ньютона можно записать следующим образом:

$$l_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + \dots + f(x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n). \qquad (4)$$

Исследуем теперь погрешность интерполяции, т.е. выясним какова разность между соответствующими частями приближенного равенства

$$f(x) \approx L_n(x).$$

Всегда справедливо представление,

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ - *остаточный член*, т.е. погрешность интерполяции. В предположении $f \in C_{n+1}[a,b]$ можно показать ([2]), что погрешность

$$R_n(x) = \omega_n(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

где $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$, $\xi = \xi(x) \in (a,b)$ - некоторая неизвестная точка. Тогда, очевидно, справедлива оценка:

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)|, \tag{5}$$

где $M_{n+1} = \max_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right| < \infty$.

Пример. Оценить погрешность приближения функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x = 117$ с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа по узлам 100, 121, 144?

Решение. Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}, \qquad f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}.$$

$$M_3 = \max_{[100,144]}|f'''(x)| = \frac{3}{8}100^{-5/2} = \frac{3}{8}10^{-5}.$$

На основании неравенства (5), окончательно получим

$$\left|\sqrt{117} - L_2(117)\right| \le \frac{3}{8\cdot 3!}10^{-5}|(117-100)(117-121)(100-144)| = 1{,}23\cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, мы имеем две различные записи одного и того же интерполяционного. Остаточный член интерполяционного многочлена Ньютона тот же, что и у интерполяционного многочлена Лагранжа, т.е. всюду в соответствующих оценках погрешности достаточно заменить $L_n(x)$ на $l_n(x)$.

Заметим, что у интерполяционного многочлена Лагранжа (2) видна явная его зависимость от каждого значения функции f_i, $i = \overline{0, n}$. Такая зависимость позволяет, например, вычислять значения ряда различных функций в фиксированной точке x по заданной системе узлов x_0, x_1, …, x_n. Однако, при изменении n интерполяционный многочлен Лагранжа требуется строить заново. В этом заключается его недостаток.

Из формулы (4) видно, что при изменении степени n у интерполяционного многочлена Ньютона требуется только добавить или отбросить соответствующее число стандартных слагаемых. Это обстоятельство можно использовать на практике при составлении таблицы значений заданной функции.

Конечные разности являются рабочим аппаратом при изучении функций, заданных таблицей значений в равноотстоящих точках и применяются в вычислениях с такими функциями.

Выберем равномерную систему узлов x_i с шагом $h > 0$. Обозначим через f_i значение функции $f(x)$ в узле x_i. Разность $f_{i+1} - f_i$ называют *конечной разностью первого порядка*; в зависимости от целей исследования эту величину обозначают как разность вперед Δf_i, разность назад ∇f_{i+1}, центральная разность $f^1_{i+1/2}$, $\delta f_{i+1/2}$.

Таким образом,

$$f_{i+1} - f_i = \Delta f_i = \nabla f_{i+1} = \delta f_{i+1/2}.$$

Разности высших порядков образуют при помощи рекуррентных соотношений:

$$\Delta^m f_i = \Delta(\Delta^{m-1} f_i) = \Delta^{m-1} f_{i+1} - \Delta^{m-1} f_i,$$
$$\nabla^m f_i = \nabla(\nabla^{m-1} f_i) = \nabla^{m-1} f_i - \nabla^{m-1} f_{i-1},$$
$$f_i^m = f_{i+1/2}^{m-1} - f_{i-1/2}^{m-1}.$$

Разности -го порядка можно выразить через значения функции f_i следующим образом ([2]): $f_i^m = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_m^j f_{i+\frac{m}{2}-j}$.

Здесь, при четном m индекс -целый, при нечетном m i-полуцелый. Например:

$$f_i^2 = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}, \qquad f_i^3 = f_{i+3/2} - 3f_{i+1/2} + 3f_{i-1/2} - f_{i-3/2},$$
$$f_i^4 = f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}.$$

Разделенная и конечная разности связаны соотношением ([2]):

$$f(x_i; \dots; x_{i+m}) = \frac{f_{i+m/2}^m}{h^m m!}$$

При интерполировании в начале или конце таблицы принято записывать интерполяционный многочлен в виде так называемых формул Ньютона для интерполирования вперед или назад.

Формула

$$l_n(x) = l_n(x_0 + tn) = f_0 + \frac{f_{1/2}^1}{1!} t + \dots + \frac{f_{n/2}^n}{n!} t(t-1) \dots (t-n+1), \qquad (6)$$

где $t = \frac{x-x_0}{h}$ называется *интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед* ([2, с.66]).

Формула

$$l_n(x) = l_n(x_0 + tn) = f_0 + \frac{f_{-1/2}^1}{1!} t + \dots + \frac{f_{-n/2}^n}{n!} t(t+1) \dots (t+n-1), \qquad (7)$$

где $t = \frac{x-x_0}{h}$ называется *интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования назад* ([2, с.66]).

В формуле (6) начало отсчета t расположено в крайнем левом узле x_0, поэтому ее удобно использовать, когда точка x, в которой вычисляется значение $l_n(x)$, находится в начале таблицы. В формуле (7) начало отсчета t расположено в крайнем правом узле x_0, поэтому ее удобно использовать при интерполяции в конце таблицы. Остаточные члены интерполяционных формул (6) и (7) будут соответственно:

$$R_n(x) = f(x) - l_n(x) = h^{n+1} t(t-1) \dots (t-n) \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}.$$

$$R_n(x) = f(x) - l_n(x) = h^{n+1} t(t+1) \dots (t+n) \frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!},$$

где ξ_1, ξ_2 - некоторые точки минимального отрезка, содержащего все узлы интерполяции и точку x.

Иногда удобно записывать интерполяционные формулы (6), (7) с помощью разностей вперед:

$$l_n(x) = f_0 + \frac{\Delta f_1}{1!} t + \frac{\Delta^2 f_2}{2!} t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^n f_n}{n!} t(t-1) \dots (t-n+1), \qquad (6^1)$$

$$l_n(x) = f_0 + \frac{\nabla f_{-1}}{1!} t + \frac{\nabla^2 f_{-2}}{2!} t(t+1) + \dots + \frac{\nabla^n f_{-n}}{n!} t(t+1) \dots (t+n-1). \qquad (7^1)$$

Варианты лабораторной работы по теме: «Интерполяция функции одной переменной»

Во всех приводимых ниже вариантах k означает номер группы.

Вариант 1

Составить интерполяционные многочлены Лагранжа L_{6i}, $i = 1,2,3$ для функций $f_1(x) = \frac{x}{k+x}$, $f_2(x) = \ln(k+x)$, $f_3(x) = \sqrt{k+x}$ по их значениям в узлах 0; 0,1; 0,15; 0,2; 0,28; 0,35; 0,4, полученные многочлены записать в тетради. Вычислить с помощью данных многочленов приближенно $f_i(0{,}25)$. Вычислить точные значения $f_i(0{,}25)$. Оценить модуль погрешности интерполяции в точке $\bar{x} = 0{,}25$ по формуле остаточного члена. Вычисления проводить с пятью десятичными знаками. Результаты вычислений занести в следующую таблицу:

$\bar{x} = 0{,}25$	Приближенные значения по формуле Лагранжа	Точные значения	Модуль погрешности	Оценка модуля погрешности с помощью остаточных членов
$f_1(\bar{x})$				
$f_2(\bar{x})$				
$f_3(\bar{x})$				

Вариант 2

Построить интерполяционный многочлен Лагранжа $L_3(x)$ для функции $f(x) = \frac{k}{k+\sqrt{1+x}}$ по ее значениям в узлах 0; 0,21; 0,44; 0,69, записать его в тетради. Вычислить $L_3(x)$ для значений x от 0 до 0,05 с шагом 0,01. В результатах вычислений сохранить по 2 десятичных знака и оформить их в виде таблицы:

x	Значения, вычисленные по интерполяционной формуле Лагранжа	Точные значения корня	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
0				
0,01				
0,02				
0,03				
0,04				
0,05				

С помощью остаточного члена оценить модуль погрешности интерполирования на отрезке $[0, 0{,}7]$.

Вариант 3

Заменяя приближенно функцию $f(x)$ интерполяционным многочленом второй степени по ее значениям в узлах

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1{,}1/2k, \quad x_2 = 1{,}1/k,$$

решить уравнение

a) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+14k^2x(x-\frac{1}{2k})}} - \frac{1}{2k^2} = 0,$

b) $f(x) = sin\frac{x}{\sqrt{1+x}} + \frac{x-0{,}2}{kx+1} - sin\frac{x}{\sqrt{1{,}2}} = 0.$

Результаты получить с 4 десятичными знаками. Построенные интерполяционные многочлены записать в тетради. Результаты вычислений оформить в виде следующей таблицы:

Пункт	Значение корня, найденное по интерполяционной формуле Лагранжа	Точное значения корня	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность в %
a)		$1/k$		
b)		0,2		

Вариант 4

Для функции $f(x) = \frac{sinx}{1+kx}$ вычислить разделенные разности $f(x_0)$, $f(x_0; x_1)$,…,,…,$f(x_0; x_1; \dots; x_{20})$, если $x_i = 0{,}5i$. В результатах вычислений сохранить по 2 десятичных знака и оформить в виде следующей таблицы:

Таблица разделенных разностей

$f(x_0)$	$f(x_0; x_1)$	$f(x_0; x_1; x_2)$	…	$f(x_0; x_1; \dots; x_{20})$

С помощью $f(x_0)$, $f(x_0; x_1)$, $f(x_0; x_1; x_2)$ составить интерполяционный многочлен второй степени для аппроксимации данной функции $f(x)$. Оценить модуль погрешности этой аппроксимации, пользуясь формулой остаточного члена.

Вариант 5

По значениям функции $f(x) = \frac{xsin(x)}{k+cos^2x}$ в узлах 0; 0,1; 0,2; 0,25; 0,35; 0,40; 0,45; 0,50 составить интерполяционный многочлен $L_7(x)$. В коэффициентах этого многочлена сохранять по 4 десятичных знака. Записать его в тетради. Вычислить значения $L_7(x)$ и $f(x)$ в точках $x_i = 0{,}01i$, $i = \overline{0{,}40}$, сохранив по 2 десятичных знака в результатах. Вычисления оформить в виде следующей таблицы:

Таблица результатов

x_i	$f(x_i)$	$L_7(x_i)$	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность, %
0				
0,01				
0,02				
…				
0,40				

Вариант 6

По значениям функции $f(x) = \frac{kx+sin\pi x}{(k+x)^2}$ в узлах 0; 0,1; 0,3; 0,4; 0,5; 0,55; 0,65; 0,70; 0,80; 1,00 составить интерполяционные многочлены степеней 3, 4, 5, 6, 7, выбирая для каждого многочлена произвольно необходимое количество узлов. В коэффициентах многочленов сохранять по 2 десятичных знака. Записать полученные многочлены в тетради. Вычислить значения $L_n(0{,}5)$, $n = 3, 4, 5, 6, 7$ и $f(0{,}5)$, сохраняя по 4 десятичных знака в результатах, и оформить в виде следующей таблицы:

Таблица результатов

n	$L_n(0{,}5)$	$f(0{,}5)$	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность %
3				
4				
5				
6				
7				

Вариант 7

Для каждой функции а) $f(x)=\frac{sin\pi x}{1+k}$, б) $f(x)=\frac{kx}{1+x^2}$, в) $f(x)=\frac{\ln(1+\frac{1+x}{k})}{\ln(4+\frac{x}{k})}$, г) $f(x)=\frac{e^x}{k+x}$, заданной на отрезке $[-1{,}1]$, построить интерполяционные многочлены степеней 2, 3 по ее значениям в узлах, являющихся корнями многочленов Чебышева степеней 3, 4 соответственно. В коэффициентах многочленов сохранить по 2 десятичных знака, а в значениях узлов – по 4 десятичных знака. Результаты вычислений оформить в виде следующих таблиц:

Таблица 1

$L_n(x)$	$f(x)=sin\pi x/(1+k)$
$L_2(x)$	
$L_3(x)$	

Таблица 2

$L_n(x)$	$f(x)=kx/(1+x^2)$
$L_2(x)$	
$L_3(x)$	

Таблица 3

$L_n(x)$	$f(x)=\dfrac{\ln(1+\frac{1+x}{k})}{\ln(4+\frac{x}{k})}$

$L_2(x)$	
$L_3(x)$	

Таблица 4

$L_n(x)$	$f(x) = e^x/(k+x)$
$L_2(x)$	
$L_3(x)$	

Вариант 8

Пусть $L_n(x)$ - интерполяционный многочлен Ньютона, построенный по значениям функции $f(x) = \frac{e^x}{1+kx}$ в узлах $x_i = \frac{0{,}05i}{1+0{,}01i}$, $i = \overline{0,n}$. Реализовать следующий алгоритм:

Пусть $n = 0$.

1. Вычислить $\varepsilon_n = |L_{n+1}(0{,}04) - L_n(0{,}04)|$. (Приближенное значение модуля погрешности приближения $f(0{,}04) \approx L_n(0{,}04)$).
2. При выполнении условия $\varepsilon_n < 10^{-4}$ полагаем $n_0 = n$ и записываем в тетрадь $L_{n_0}(x)$, сохранив по 2 десятичных знака в соответствующих коэффициента, после чего переходим к пункту 4, иначе перейти к пункту 3.
3. В случае $\varepsilon_n > 10^{-4}$ и $n < 10$ полагаем $n := n + 1$ и переходим к пункту 1, а если $\varepsilon_n > 10^{-4}$, но $n = 10$, то переходим к пункту 5.
4. Заполнить таблицу вида:

$f(0{,}04) = L_0(0{,}04)$	$L_1(0{,}04)$	$L_2(0{,}04)$	…	$L_{n_0}(0{,}04)$

В $L_k(0{,}04)$, $k = \overline{0, n_0}$ сохранить по 4 десятичных знака и перейти к пункту 6.

5. Заполнить таблицу вида:

$f(0{,}04) = L_0(0{,}04)$	$L_1(0{,}04)$	$L_2(0{,}04)$	…	$L_{10}(0{,}04)$

В $L_k(0{,}04)$, $k=\overline{0,10}$ сохранить по 4 десятичных знака. По этой таблице найти n_0 из условия: $\varepsilon_{n_0} = min\varepsilon_n = min|L_{n+1}(0{,}04) - L_n(0{,}04)|$.

6. Записать в тетради многочлен $L_{n_0}(x)$, сохранив по 2 десятичных знака в соответствующих коэффициентах.

Вариант 9

Пусть $f(x)=\frac{x}{x+k}$, $x_i = hi,\ i \in Z$. Вычислить конечные разности $\Delta^m f_0,\ m=\overline{1,10}$ при значениях $h = 0{,}01; 0{,}02; 0{,}03; 0{,}04; 0{,}05.$ В результатах сохранить по 5 десятичных знака и оформить в виде следующей таблицы:

Таблица конечных разностей

h	$\Delta^1 f_0$	$\Delta^2 f_0$	…	$\Delta^{10} f_0$
0,01				
0,02				
0,03				
0,04				
0,05				

Вариант 10

Пусть $f(x)=\frac{x+2}{x+\alpha+1}$, $\alpha = \overline{k-1, k+2}$, $x_i = 0{,}01i$, $i \in Z$. Вычислить конечные разности $\Delta^m f_0$, $m=\overline{1{,}10}$. В результатах сохранить по 5 десятичных знака и оформить в виде следующей таблицы:

Таблица конечных разностей

α	$\Delta^1 f_0$	$\Delta^2 f_0$	…	$\Delta^{10} f_0$
$k-1$				
k				
$k+1$				
$k+2$				

Вариант 11

Построить интерполяционный многочлен Ньютона 5 степени $l_5(x)$ для интерполирования вперед по значениям функции $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+k}$ в равноотстоящих узлах $x_i = 0{,}01i, \quad i \in Z$. Найти значение этого многочлена в точках $y_i = 0{,}001i, \quad i = \overline{1{,}10}$. Сам многочлен $L_5(x)$ записать в тетради, сохранив по 2 десятичных знака в коэффициентах. Вычисления оформить в виде следующей таблицы:

Таблица результатов

y_i	0,001	0,002	…	0,0100
$L_5(y_i)$				
$f(y_i)$				
$\lvert f(y_i) - L_5(y_i)\rvert$				

Причем, в результатах сохранять по 3 десятичных знака.

Вариант 12

Составить интерполяционные многочлены Ньютона степеней $n = 2,3,4,5,6$ по значениям функции $f(x) = \frac{x sinx}{k+x^2}$ в равноотстоящих узлах $x_i = 0{,}02i, \ i \in Z$ и при каждом значении n вычислить $L_n(\frac{\pi}{10})$ и и $f(\frac{\pi}{10})$. Результаты оформить в виде следующей таблицы:

Таблица результатов

n	$L_n(x)$	$L_n(\frac{\pi}{10})$	$f(\frac{\pi}{10})$	$\left\lvert L_n\left(\frac{\pi}{10}\right) - f(\frac{\pi}{10})\right\rvert$
2				
3				
4				
5				
6				

В коэффициентах $L_n(x)$ и в значениях $L_n(\frac{\pi}{10})$ и $f(\frac{\pi}{10})$ сохранить по 4 десятичных знака.

Вариант 13

Построить интерполяционный многочлен Ньютона 5-й степени $L_5(x)$ для интерполирования назад по значениям функции $f(x) = \frac{(x+10)sin\pi x}{k+z}$ в равноотстоящих узлах $x_i = 0{,}01i,\ i = \overline{1, 10}$. Сам многочлен $L_5(x)$ записать в тетради, сохранив по 2 десятичных знака в коэффициентах. Вычисления оформить в виде таблицы:

Таблица результатов

y_i	0,001	0,002	…	0,0100
$L_5(y_i)$				
$f(y_i)$				
$\lvert f(y_i) - L_5(y_i)\rvert$				

Причем, в результатах сохранить по 3 десятичных знака.

Вариант 14

Построить интерполяционные многочлены Ньютона степеней $n = \overline{2{,}5}$ для интерполирования назад в точке $x = 0$ по значениям функции $f(x) = \frac{e^x}{x^2+k} + \frac{x^2+k}{e^x}$ в равноотстоящих узлах $x_i = 0{,}01i$, $i \in Z$ и записать их в тетради. В коэффициентах сохранять по 2 десятичных знака.

Вариант 15

Построить интерполяционные многочлены Ньютона степеней $n = \overline{2{,}5}$ для интерполирования назад в точке $x = 0$ по значениям функции $f(x) = ln\left(1 + \frac{x}{1+x^2}\right)$ в равноотстоящих узлах $x_i = 0{,}01i$, $i \in Z$ и записать их в тетради. В коэффициентах сохранять по 2 десятичных знака.

Вариант 16

Вычислить интеграл $I = \int_{-1}^{1}(1+x)^{k+2}e^{x}dx$, заменив подынтегральную функцию интерполяционным многочленом 2 степени так, чтобы $\sup_{x\in[-1,1]}\prod_{i=0}^{2}|x-x_i|$ был минимальным, где x_i - узлы из отрезка $[-1,1]$, в которых $\sup_{x\in[-1,1]}\prod_{i=0}^{2}|x-x_i|$ достигает наименьшего значения.

Вариант 17

Для функции $f(x) = e^{x^2}cos\sqrt{k+x^2}$ по таблице:

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_{20}
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_{20})$

где $x_i = 1 + 0{,}1i$, $i = \overline{0{,}20}$, составить таблицу значений производных $f'(y_i), f''(y_i)$, $y_i = 1{,}2 + 0{,}1i$, $i = \overline{1{,}16}$, вычисленных по формулам численного дифференцирования 2-го порядка точности.

Вариант 18

Составить таблицу значений функции $f(x) = \int_{1}^{x}\frac{e^{-(4-k)t}}{t}dt$ для $x \in [1{,}3]$ с шагом 0.1, заменив подынтегральную функцию интерполяционным многочленом 2-й степени. Узлы интерполирования взять следующие: 1, $\frac{1+x}{2}$, x.

Вариант 19

Для функции $f(x) = \frac{e^{x^2}}{1+\alpha x}$ вычислить разделенные разности $f(x_0)$, $f(x_0; x_1)$, …,$f(x_0; x_1; \dots; x_{10})$, если $x_i = i$, $i = \overline{0,10}$. В результатах вычислений сохранить по 2 десятичных знака и оформить их в виде следующей таблицы:

α	$f(x_0)$	$f(x_0; x_1)$	…	$f(x_0; x_1; \dots; x_{10})$
k				
$k+1$				
$k+2$				
$k+3$				

Вариант 20

Вычислить $f^{(10)}(2)$, заменив функцию $f(x) = \frac{arctg\sqrt{k+x^2}}{1+x}$ на отрезке $[1.5,2.5]$ интерполяционным многочленом 10-й степени, выбрав узлы интерполирования x_i на этом отрезке так, чтобы число $\sup_{x\in[1.5,2.5]} \prod_{i=0}^{10} |x - x_i|$ было минимальным.

Вариант 21

Вычислить интеграл $I = \int_0^1 sin\sqrt{k + x^2} e^x dx$, заменив подынтегральную функцию интерполяционным многочленом Ньютона 3-й степени по узлам 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, 2. Оценить погрешность.

Вариант 22

Для функции $f(x) = e^{x^2} cos\sqrt{\frac{k+x^2}{chx}}$ по таблице:

x	x_0	x_1	…	x_{10}
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	…	$f(x_{10})$

где $x_i = 0{,}3i$, $i = \overline{0{,}10}$, вычислить $f^{(3)}(y_i)$, $y_i = 0{,}4i$, $i = \overline{0{,}7}$, пользуясь формулами численного дифференцирования 2-го порядка точности.

Вариант 23

Задание 1

Найти приближенно $f(0{,}702)$ с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, если функция $f(x)$ задана таблично:

0,43	0,48	0,55	0,62	0,70	0,75
1,63597	1,73234	1,87686	2,03345	2,22846	2,35973

Задание 2

Найти приближенно $f(1{,}3832)$ с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа с равноотстоящими узлами, если функция $f(x)$ задана таблично:

1,375	1,380	1,385	1,390	1,395	1,400
5,04192	5,17744	5,32016	5,47069	5,62968	5,79788

Указание: воспользоваться интерполяционной формулой Ньютона с равноотстоящими узлами.

Вариант 24

Составить таблицу значений функции $f(x) = \int_0^x \frac{e^{-(4-k)t}}{1+t} dt$ для $x \in [0{,}3]$ с шагом 0.1, заменив подынтегральную функцию интерполяционным многочленом 2-й степени. Узлы интерполирования взять следующие: 0, $\frac{x}{2}$, x. Построить график функции $f(x)$.

Вариант 25

Составить таблицу значений функции $f(x) = 5sin\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)$ для $x \in [0, \pi]$ с шагом 0.1, заменив подынтегральную функцию интерполяционным многочленом 2-й степени. Узлы интерполирования взять следующие: 1, $\frac{1+x}{2}$, x. Построить график функции $f(x)$.

Требования к оформлению лабораторной работы.

Лабораторная работа должна содержать:

1. Четко сформулированные лабораторные задания;
2. Краткое описание применяемых методов;
3. План выполнения задания;
4. Программы выполнения задания;
5. Результаты в виде таблиц, графиков и т.д.;
6. Краткие выводы.

При несоблюдении вышеприведенных требований лабораторная работа к зачету не принимается.

Образец выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа

Тема: Интерполирование функции одной переменной

Вариант 0

1. Постановка задачи

Построить интерполяционные многочлены $L_n(x)$ степеней

$n = 2, 3, 4$ по значениям функции а) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{1+x}$, б) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, в) $f(x) = \frac{x}{1+sinx}$ в узлах $x_i \in [1.5{,}2.5]$, $i = \overline{0,n}$, выбрав их так, чтобы оценка $\max_{1,5 \le x \le 2,5} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|$ при каждом n была бы минимальной. В коэффициентах многочленов сохранить по 2 десятичных знака, а в значениях выбранных узлов сохранить по 4 десятичных знака. Результаты вычислений оформить в виде следующих таблиц.

Таблица 1.

$L_n(x)$	$f(x) = e^{x^2}/(1+x)$
$L_2(x)$	
$L_3(x)$	
$L_4(x)$	

Таблица 2.

$L_n(x)$	$f(x) = x/(1+x^2)$
$L_2(x)$	
$L_3(x)$	
$L_4(x)$	

Таблица 3.

$L_n(x)$	$f(x) = x/(1+sinx)$
$L_2(x)$	
$L_3(x)$	
$L_4(x)$	

2. Краткое описание применяемого метода.

Для данной функции $f(x)$ остаточный член интерполяционного многочлена $L_n(x)$, построенного по узлам x_0, x_1,…,x_n отрезка $[a, b]$, имеет вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),$$

где $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$, $y_1 < \xi < y_2$, $y_1 = \min(x, x_0, \dots, x_n)$, $y_2 = \max(y, x_0, \dots, x_n)$.

Оценим модуль погрешности $R_n(x)$

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|,$$

где $M_{n+1} \ge \max_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$.

Выберем теперь узлы $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$ так, чтобы значение функции $g(x_0, x_1, \dots, x_n) = \max_{[a,b]}|\omega_{n+1}(x)|$ было минимальным. Тогда минимум данной функции - $\max_{[a,b]}|R_n(x)|$.

Обозначим через $T_n(x)$ многочлен Чебышева, который, как известно, определяется с помощью рекуррентного соотношения:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\ \ T_0(x) = 1,\ T_1(x) = 1.$$

Его можно представить следующим образом: $T_n(x) = \cos(narccosx)$ Отсюда видно, что $T_n(x)$ имеет n корней на отрезке $[-1,1]$:

$$x_k = cos\frac{\pi(2k-1)}{2n},\quad k = \overline{1, n}.$$

Из определения многочлена Чебышева следует, что старшим членом многочлена $T_n(x)$ является $2^{n-1}x^n$. Соответственно старшим членом многочлена $\bar{T}_n(x) = 2^{1-n}T_n(x)$ является x^n. Его называют многочленом, наименее уклоняющимся от нуля в силу следующего свойства:

<u>Лемма</u>.([2]). *Если* $P_n(x)$ *- многочлен степени* n *со старшим коэффициентом 1, то*$\max_{[-1,1]}|P_n(x)| \ge \max_{[-1,1]}|\bar{T}_n(x)| = 2^{1-n}$.

Поскольку старший коэффициент многочлена -й степени $\omega_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$ равен 1, то по этой лемме $\max_{[-1,1]}|\omega_n(x)| \geq \max_{[-1,1]}|T_n(x)|$.

Взяв в качестве узлов $x_0, x_1, \dots, x_n$ корни t_k, $k = \overline{1,n}$ многочлена Чебышева $T_n(x)$, получим $\omega_n(x) = T_n(x)$. Следовательно, величина $g(x_0, x_1, \dots, x_n) = \max_{[-1,1]}|\omega_n(x)| = 2^{1-n}$ является минимальной.

Линейной заменой переменных $x' = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x$ отрезок $[-1,1]$ можно перевести в заданный отрезок $[a, b]$. Многочлен $T_n(x)$ при этом преобразуется в многочлен $T_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$ со старшим коэффициентом $\left(\frac{2}{b-a}\right)^n$. В соответствии с вышеприведенной леммой можно утверждать, что многочлен $T_n^{[a,b]}(x) = (b-a)^n 2^{1-2n} T_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$ со старшим коэффициентом 1 является многочленом, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $[a, b]$. Это означает, что любого многочлена $P_n(x)$ со старшим коэффициентом 1 справедливо неравенство $\max_{[a,b]}|P_n(x)| \geq \max_{[a,b]}\left|T_n^{[a,b]}(x)\right| = 2^{1-2n}(b-a)^n$. Нетрудно проверить, что нулями многочлена $T_n^{[a,b]}$ являются точки $t_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} cos\frac{\pi(2k+1)}{2n+2}$, $k = \overline{0,n}$. Поэтому, если в записи многочлена $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$ взять $x_k = t_k$, $k = \overline{0,n}$, то $\omega_{n+1}(x) = T_{n+1}^{[a,b]}$.

В нашем случае $a = 1{,}5$, $b = 2{,}5$. Поэтому возьмем

$$x_k = t_k = 2 + 0{,}5 cos\frac{\pi(2k+1)}{2n+2}, \quad k = \overline{0,n}.$$

Тогда

$$\omega_n(x) = T_n^{[0,1]}(x) = (x - t_0)\dots(x - t_n).$$

3.План выполнения задания

1. Составляем подпрограмму вычисления коэффициентов интерполяционного многочлена $a_i = \frac{f(x_i)}{\prod_{i \neq j}(x_i - x_j)}$, $i = \overline{0, n}$.

2. В основной программе задаем массив узлов интерполяции x_i и обращаемся к подпрограмме для вычисления коэффициентов интерполяционного многочлена Лагранжа a_i.

3. Выводим на печать при каждом значении n массив коэффициентов интерполяционного многочлена, сохранив по 2 десятичных знака в каждом коэффициенте.

4. С помощью, найденных по программе коэффициентов a_i, вручную для каждого n составляем интерполяционный многочлен $L_n(x)$ и заполняем таблицу, указанное в условии задания.

4. Программа вычисления коэффициентов интерполяционного многочлена.

```
uses crt;{$F+}
type vect=array[0..4] of real;
fnc=function(x:real):real;
var  n,i:integer;xx,a:vect;
function fa(x:real):real;
begin fa:=exp(sqr(x))/(1+x) end;
function fb(x:real):real;
begin fb:=x/(1+sqr(x)) end;
function fc(x:real):real;
begin fc:=x/(1+sin(x)) end;
procedure lagr(n:integer;xx:vect;f:fnc; var a:vect);
var i,j:integer;
```

```
    p:real;
begin
for i:=0 to n do
begin
  p:=1;
  for j:=0 to n do if j<>i then p:=p*(xx[i]-xx[j]);
  a[i]:=f(xx[i])/p
end
end;
begin clrscr; writeln;
                         n:=2;
   writeln('         n=',n);
    xx[0]:=2-0.5/sqrt(2);     xx[1]:=2+0.5/sqrt(2);
     lagr(n,xx,fa,a); writeln('koefic dlya fa');
   for i:=0 to n do
writeln('a',i,'=',a[i]:11:4);readkey;writeln;
     lagr(n,xx,fb,a); writeln('koefic dlya fb');
   for i:=0 to n do writeln('a',i,'=',a[i]:11:4);
readkey;writeln;
     lagr(n,xx,fc,a); writeln('koefic dlya fc');
   for i:=0 to n do writeln('a',i,'=',a[i]:11:4);
readkey;writeln;
   writeln;
                         n:=3;
    writeln('         n=',n);
  xx[0]:=2-0.5*0.5;     xx[1]:=2; xx[2]:=2+0.5*0.5;
   lagr(n,xx,fa,a);writeln('koefic dlya fa');
   for i:=0 to n do
writeln('a',i,'=',a[i]:11:4);readkey;writeln;
    lagr(n,xx,fb,a);writeln('koefic dlya fb');
   for i:=0 to n do writeln('a',i,'=',a[i]:11:4);
readkey;writeln;
  lagr(n,xx,fc,a);writeln('koefic dlya fc');
   for i:=0 to n do writeln('a',i,'=',a[i]:11:4);
readkey;writeln;
   writeln;
                         n:=4;
   writeln('         n=',n);
  xx[0]:=2-0.5*cos(pi/8);     xx[1]:=2-0.5*cos(3*pi/8);
  xx[3]:=2+0.5*cos(3*pi/8); xx[4]:=2+0.5*cos(pi/8);
   lagr(n,xx,fa,a); writeln('koefic dlya fa');
   for i:=0 to n do
writeln('a',i,'=',a[i]:11:4);readkey;writeln;
    lagr(n,xx,fb,a);writeln('koefic dlya fb');
```

```
   for i:=0 to n do writeln('a',i,'=',a[i]:11:4);
readkey;writeln;
  lagr(n,xx,fc,a);writeln('koefic dlya fc');
   for i:=0 to n do writeln('a',i,'=',a[i]:11:4);
readkey;
 end.
```

По данной программе получены следующие значения коэффициентов интерполяционных многочленов

n=2

Коэффициенты интерполяционного многочлена Лагранжа

а) для функции $f(x) = \frac{e^{x^2}}{1+x}$

$a0 = 62{,}00$; $a1 = -291{,}19$; $a2 = 388{,}89$.

б) для функции $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$,

$a0 = 3{,}45$; $a1 = -6{,}40$; $a2 = 2{,}97$.

в) для функции $f(x) = \frac{x}{1+sinx}$

$a0 = 7{,}06$; $a1 = -16{,}76$; $a2 = 10{,}12$.

n=3

а) для функции $f(x) = \frac{e^{x^2}}{1+x}$

a0=-25,69; a1=138,65; a2=-563,94; a3=758,51.

б) для функции $f(x) = x/(1+x^2)$

a0=-2,80; a1=6,26; a2=5,58; a3=2,13.

в) для функции $f(x) = x/(2+\sin x)$

a0=-4,71; a1=13,56; a2=-17,86; a3=9,26.

n=4

а) для функции $f(x) = e^x/(1+x)$

a0=2087,22; a1=-2425,81; a2=931,81; a3=-281,21; a4=64,03.

б) для функции $f(x) = x/(1+x^2)$

a0=5,49; a1=-15,17; a2=20,48; a3=-18,07; a4=7.26.

в) для функции $f(x) = x/(2+\sin x)$

a0=24,21; a1=-54,30; a2=53,63; a3=-35,50; a4=12,07.

С помощью полученных коэффициентов построим интерполяционные многочлены.

5.Таблицы интерполяционных многочленов

Таблица 1

$L_n(x)$	$f(x) = e^x/(1+x)$
$L_2(x)$	62,20(x-2,00)(x-2,25)-291,19(x-1,75)(x-2,25)+388,89(x-1,75)(x-2,00)
$L_3(x)$	-25,69(x-1,81)(x-2,19)(x-2,46)+138,65(x-1,54)(x-2,19)(x-2,46)- -563,94(x-1,54)(x-1,81)(x-2,46)+758,51(x-1,54)(x-1,81)(x-2,19)
$L_4(x)$	2087,82(x-2,29)(x-2,00)(x-1,71)(x-1,52)- -2425,22(x-2,48)(x-2,00)(x-1,71)(x-1,52) +931,81(x-2,48)(x-2,29)(x-1,71)(x-1,52)- -281,21(x-2,48)(x-2,29)(x-2,00)(x-1,52)+ +64,03(x-2,48)(x-2,29)(x-2,00)(x-1,71)

Таблица 2

$L_n(x)$	$f(x) = x/(1+e^x)$
$L_2(x)$	3,45(x-2,00)(x-2,25)-6,40(x-1,75)(x-2,25)+2,97(x-1,75)(x-2,00)
$L_3(x)$	-2,80(x-1,81)(x-2,19)(x-2,46)+6,26(x-1,54)(x-2,19)(x-2,46)- -5,58(x-1,54)(x-1,81)(x-2,46)+2,13(x-1,54)(x-1,81)(x-2,19)
$L_4(x)$	5,49(x-2,29)(x-2,00)(x-1,71)(x-1,52)- -15,17(x-2,48)(x-2,00)(x-1,71)(x-1,52)+ +20,48(x-2,48)(x-2,29)(x-1,71)(x-1,52)- -18,07(x-2,48)(x-2,29)(x-2,00)(x-1,52)+ +7,26(x-2,48)(x-2,29)(x-2,00)(x-1,71)

Таблица 3

$L_n(x)$	$f(x) = x/(2+Sinx)$
$L_2(x)$	7,06(x-2,00)(x-2,25)-16,76(x-1,75)(x-2,25)+10,12(x-1,75)(x-2,00)
$L_3(x)$	-4,71(x-1,81)(x-2,19)(x-2,46)+13,56(x-1,54)(x-2,19)(x-2,46)- -17,86(x-1,54)(x-1,81)(x-2,46)+9,26(x-1,54)(x-1,81)(x-2,19)
$L_4(x)$	24,21(x-2,29)(x-2,00)(x-1,71)(x-1,52)- -54,30(x-2,48)(x-2,00)(x-1,71)(x-1,52)+ +53,63(x-2,48)(x-2,29)(x-1,71)(x-1,52)- -35,50(x-2,48)(x-2,29)(x-2,00)(x-1,52)+ +12,07(x-2,48)(x-2,29)(x-2,00)(x-1,71)

1. Краткие выводы.

1. Во всех случаях знаки коэффициентов многочлена чередуются.

2. С возрастанием n модули коэффициентов многочлена $L_n(x)$ возрастают.

3. Наибольшие по модулю значения имеют коэффициенты многочленов, построенных для функции $f(x) = e^x/(1+x)$.

Литература

1. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы,
т.1, М., 1976, 304 с.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы, М., 1987, 600с.